SPIELTHEORIE : MATHEMATISCHE MODELLE DES WETTBEWERBS

Maria Koth

Im Lehrplan für den neuen Wahlpflichtgegenstand Mathematik wird eine langen Liste von Themenvorschlägen zur Auswahl gestellt. Unter anderem findet man hier auch den Begriff "Spieltheorie". Da es sich dabei um eine relativ junge mathematische Disziplin und um ein für die Schulmathematik völlig neues Gebiet handelt, werden in diesem Vortrag grundlegende Begriffe der Spieltheorie vorgestellt und einfache Beispiele diskutiert.

1. GRUNDBEGRIFFE

Unter Spieltheorie versteht man eine Sammlung von mathematischen Modellen zum Studium der Entscheidungsbildung in Konfliktsituationen. Solche treten zum Beispiel auf bei den sogenannten strategischen Spielen (wie etwa Dame oder Schach), aber auch bei vielen wirtschaftlichen oder sozialen Phänomenen.

Als Geburtsjahr der Spieltheorie wird das Jahr 1944 angesehen, in dem der Mathematiker John von Neumann gemeinsam mit dem Ökonomen Oskar Morgenstern das grundlegende Buch "Theory of Games and Economic Behaviour" [4] veröffentlicht hat. Seither ist eine sehr große Zahl an Publikationen zu diesem Themenbereich erschienen. Die Spieltheorie hat eigene mathematische Begriffe und Methoden entwickelt, die es in Anwendungen ermöglichen sollen, Einsichten in komplexe Organisationsstrukturen im wirtschaftlichen und sozialen Bereich zu gewinnen. Bekannt sind zahlreiche Anwendungen in den Bereichen theoretische Ökonomie, statistische Entscheidungstheorie, Politik- und Militärwissenschaft, Versicherungsmathematik, aber auch Soziologie und Psychologie.

Ausgehend von einem klassischen Beispiel, dem sogenannten "Gefangenendilemma", sollen nun grundlegende Begriffe vorgestellt werden. Man denke sich die folgende Situation:

Nach einem Verbrechen werden zwei Verdächtige verhaftet und in Einzelhaft gehalten. Da man keine Beweise gegen sie in der Hand hat, stellt man ihnen die folgenden Alternativen in Aussicht: Wenn beide gestehen, so werden sie nicht zur Höchststrafe von zehn Jahren, sondern nur zu acht Jahren Gefängnis verurteilt. Wenn einer der Gefangenen leugnet, der andere jedoch gesteht, daß beide gemeinsam das Verbrechen begangen haben, so wird der erste aufgrund seiner Bereitwilligkeit, mit der Polizei zusammenzuarbeiten, freigesprochen, der andere jedoch zur Höchststrafe von zehn Jahren verurteilt. Wenn schließlich beide standhaft leugnen, so können sie mangels anderer Beweise nicht überführt werden und müssen nur mit einer kleinen Strafe wegen anderer geringfügiger Delikte rechnen (zum Beispiel beide ein Jahr Gefängnis).

Jeder der beiden Gefangenen hat also zwei mögliche "Strategien": er kann entweder leugnen oder gestehen. Da beide in Einzelhaft gehalten und separat voneinander verhört werden, weiß keiner, für welche der beiden Strategien sich der andere entscheiden wird. Die Strafe, die ihn erwartet, hängt jedoch auch vom Verhalten des anderen ab. Drückt man das Strafausmaß "n Jahre Gefängnis" durch die Zahl −n aus, so kann man für jeden der beiden Gefangenen die möglichen Ergebnisse in Matrixform darstellen:

<u>Auszahlungsmatrix für 1:</u>

		Strat.wahl von 2:	
		L	G
Strat.wahl von 1:	L	−1	−10
	G	0	−8

<u>Auszahlungsmatrix für 2:</u>

		Strat.wahl von 2:	
		L	G
Strat.wahl von 1:	L	−1	0
	G	−10	−8

Die linke Matrix gibt die Strafe für den ersten Gefangenen in Abhängigkeit von der Strategienwahl der beiden an. Entscheidet er sich für "Leugnen" (dh. erste Zeile der Matrix), so erwartet ihn, je nachdem wie sich der andere verhält, entweder ein Jahr oder zehn Jahre Gefängnis. Wählt er dagegen "Gestehen", so erwartet ihn jeweils eine geringere Strafe. Unabhängig vom Verhalten des anderen ist es für ihn daher günstiger, sich für das "Gestehen" zu entscheiden. Betrachtet man die beiden Spalten der rechten Matrix, so sieht man, daß dieselbe Überlegung auch auf den zweiten Gefangenen anwendbar ist. Rationalerweise muß sich also jeder der beiden für "Gestehen" entscheiden, mit dem Ergebnis, daß beide dann acht Jahre eingesperrt werden.

Dieses Resultat ist sehr überraschend. Auf den ersten Blick würde man selbstverständlich annehmen, es wäre für die Gefangenen am vernünftigsten, standhaft zu leugnen, da beide dann ja nur ein Jahr Gefängnis erwartet. Da jedoch jeder seine Entscheidung allein treffen muß und auf die Kooperation des anderen nicht vertrauen kann, führen die Eigeninteressen der einzelnen schließlich zu einem Ergebnis, das für beide nicht optimal ist.

Dieses "Gefangenendilemma" illustriert ein Paradoxon, dem wir im wirklichen Leben sehr oft begegnen: Eine mögliche Interpretation dieses Spiels ist die Situation des einzelnen ("ich" = Spieler I) in einer Gemeinschaft ("die anderen" = Spieler II), wo ebenfalls jeder der beiden Spieler die Möglichkeit hat, sich entweder "kooperativ" oder "eigennützig" zu verhalten. Da in vielen Fällen der Einzelne auf die Kooperation "der anderen" nicht vertrauen kann, erscheint es ihm vorteilhafter, sich für die Strategie "eigennützig" zu entscheiden ("Tragödie des Gemeinwesens").

Dieses einfache Beispiel zeigt wesentliche Charakteristika spieltheoretischer Modelle auf:

- Konfliktsituationen sind allgemein dadurch gekennzeichnet, daß zwei oder mehrere Personen oder Personengruppen mit widersprechenden Zielsetzungen, die sogenannten Spieler, bestimmte Entscheidungen zu treffen haben.

- Man nimmt nun an, daß die Spieler ihre Handlungen nur aus einer vorgegebenen Liste von Möglichkeiten wählen können. Die möglichen Optionen werden als Strategien bezeichnet.

- Die Auswahl einer speziellen Strategie führt zu einem Spielergebnis, dessen Nutzen bzw. Schaden für die Spieler durch numerische Größen, die sogenannten Auszahlungen, ausgedrückt werden kann.

- Wesentlich ist, daß jeder Spieler nur seine eigenen Züge kontrollieren kann, seine Auszahlung aber auch vom Verhalten aller übrigen Spieler abhängt.

- Außerdem geht man davon aus, daß jedem Spieler nicht nur seine eigenen Strategien, sondern auch die des anderen sowie die jeweils zu erwartenden Auszahlungen bekannt sind.

- In dieser Situation stellt sich die Frage nach dem rationalen Verhalten der einzelnen Spieler, das heißt nach der Auswahl jener Strategie, die den erwarteten Nutzen maximiert.

Die in der Literatur betrachteten spieltheoretischen Modelle kann man unter anderem nach folgenden Kriterien einteilen:

a) nach der Anzahl der Spieler
b) mit endlicher oder unendlicher Strategienmenge
c) mit oder ohne mögliche Kooperation zwischen den Spielern
d) mit oder ohne Beteiligung des Zufalls
e) nach der Art der Verteilung der Auszahlungen an die Spieler

Im einfachsten Fall nimmt man an, daß nur zwei Spieler I und II beteiligt sind (Zweipersonenspiel), denen jeweils nur endlich viele Strategien zur Auswahl stehen. Bezeichnet man die Strategienmenge von Spieler I mit $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ und die von Spieler II mit $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$, so kann man die zu erwartenden Auszahlungen für die Spieler durch zwei mxn-Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ angeben:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \ldots\ldots & \beta_n \\
\hline
\alpha_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots & a_{1n} \\
\alpha_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots\ldots & a_{2n} \\
\cdot & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\cdot & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_m & a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cccc}
 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \ldots\ldots & \beta_n \\
\hline
\alpha_1 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \ldots\ldots & b_{1n} \\
\alpha_2 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \ldots\ldots & b_{2n} \\
\cdot & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\cdot & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_m & b_{m1} & b_{m2} & \ldots\ldots & b_{mn}
\end{array}$$

Das Matrixelement a_{ij} entspricht der Auszahlung für Spieler I, falls er seine Strategie α_i und Spieler II die Strategie β_j wählt, b_{ij} gibt die entsprechende Auszahlung für Spieler II an.

2. ZWEI-PERSONEN-NULLSUMMENSPIELE

Einen wichtigen Sonderfall der Zweipersonenspiele stellen jene Spiele dar, bei denen die Spieler total entgegengesetzte Interessen haben. Für die Auszahlungsmatrizen gilt hier

$$b_{ij} = -a_{ij} \text{ für alle } i,j$$

$$\text{bzw.} \quad a_{ij} + b_{ij} = 0 \text{ für alle } i,j.$$

Da die Summe der Auszahlungen an die beiden Spieler hier stets gleich Null ist, hat sich für diese Spiele der Name Nullsummenspiele eingebürgert. Die Theorie der Nullsummenspiele wurde bereits 1928 in einer Arbeit von John von Neumann [3] entwickelt und kann als Ausgangspunkt der gesamten Spieltheorie betrachtet werden.

Ausgehend von einem konkreten Beispiel sollen nun wesentliche Resultate über Nullsummenspiele dargestellt werden. Da Nullsummenspiele dadurch charakterisiert sind, daß stets der Gewinn des einen Spielers dem Verlust des anderen entspricht, genügt es, nur eine der beiden Auszahlungsmatrizen anzugeben (üblicherweise die für Spieler I):

	β_1	β_2	β_3	β_4	m_i
α_1	2	−2	4	−1	−2
α_2	1	5	3	2	1
α_3	9	−1	1	3	−1
M_j	9	5	4	3	

Der obigen Auszahlungsmatrix für Spieler I kann man entnehmen, welche Strategie die jeweils beste Antwort auf eine bestimmte Strategienwahl des Gegners ist. Wählt, zum Beipiel, Spieler I seine Strategie α_1, so ist es für II am günstigsten β_2 zu wählen, was ihm einen Gewinn von 2 verspricht. Kann I damit rechnen, daß II seine Strategie β_2 wählt, so wird er selbstverständlich α_2 wählen, um sich einen Gewinn von 5 zu sichern.

Da wohl jeder der beiden Spieler über die möglichen Strategienwahlen des anderen und die damit verbundenen Auszahlungen informiert ist, jedoch nicht weiß, für welche Strategie der andere sich entscheiden wird, erscheint es sinnvoll, zumindest den zu erwartenden minimalen Gewinn bzw. den zu erwartenden maximalen Verlust abzuschätzen. Aus der Sicht von Spieler I bedeutet das:

Wählt er seine Strategie α_i (≡ i-te Zeile der Matrix), so erhält er mindestens

$$m_i = \min_j a_{ij} = \text{untere Gewinnschranke für } \alpha_i .$$

Wählt er nun jene Zeile i_0, für die diese Gewinnschranke möglichst groß ist, so stellt die Zahl

$$U = m_{i_0} = \max_i m_i = \max_i \min_j a_{ij}$$

jenen Gewinn dar, den I sich unabhängig von der Strategienwahl des anderen mindestens sichern kann. Man nennt diese Zahl U den <u>unteren reinen Wert</u> des Spiels, die zugehörige Strategie α_{i_0} heißt <u>Minimaxstrategie</u> von Spieler I. Im obigen Beispiel haben die Zeilenminima m_i die Werte -2, 1 und -1. Daher ist U = 1, und α_2 ist Minimaxstrategie von I.

Analog dazu betrachtet Spieler II die Spalten der Auszahlungsmatrix. Wählt er β_j (≡ j-te Spalte), so verliert er höchstens

$$M_j = \max_i a_{ij} = \text{obere Verlustschranke für } \beta_j .$$

Er wird nun versuchen, diese obere Verlustschranke zu minimieren. Die Zahl

$$O = M_{j_0} = \min_j M_j = \min_j \max_i a_{ij}$$

stellt den maximalen Verlust dar, mit dem Spieler II rechnen muß (sofern er die zugehörige Minimaxstrategie β_{j_0} verwendet). Man nennt O den <u>oberen reinen Wert</u> des Spiels. Im obigen Beispiel hat man als Spaltenmaxima die Werte 9, 5, 4 und 3. Daraus folgt, daß O = 3 und daß β_4 Minimaxstrategie von II ist.

Falls beide Spieler ihre Minimaxstrategie α_{i_0} und β_{j_0} anwenden, so gilt immer $U \leq a_{i_0 j_0} \leq O$. Ist, wie im obigen Beispiel, U < O, so besteht für die Spieler die Versuchung, durch Erraten der Strategie des Gegners die garantierte Schranke übertreffen zu wollen. Merkt im obigen Beispiel etwa I, daß II seine Minimaxstrategie β_4 verwendet, so wird er auf α_3 wechseln. II wird darauf mit β_2 antworten, und es ergibt sich der folgenden Kreislauf:

II β_4 --> I α_3 --> II β_2 --> I α_2 --> II β_1 --> I α_3 usw.

Anders ist die Situation im folgenden Beispiel, wo U = O = 4 ist:

	β_1	β_2	β_3	β_4	m_i
α_1	1	2	-1	0	-1
α_2	6	5	4	6	4
α_3	2	-1	3	7	-1
M_j	6	5	4	7	

Da hier $a_{23} = 4$ gleichzeitig Zeilenminimum und Spaltenmaximum ist, hat keiner der Spieler Veranlassung von seiner Minimaxstrategie abzuweichen. Für jeden der Spieler bringt hier die Wahl einer anderen Strategie Nachteile, sofern der Gegner an seiner Minimaxstrategie festhält. Diese Tatsache motiviert die folgende Definition:

Definition:

1) Ein Paar von Minimaxstrategien $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$ heißt Sattelpunkt (oder Gleichgewichtspunkt), wenn das zugehörige Matrixelement $a_{i_0 j_0}$ gleichzeitig Zeilenminimum und Spaltenmaximum ist, dh.

$$a_{i j_0} \leq a_{i_0 j_0} \leq a_{i_0 j} \quad \text{für alle } i,j.$$

2) Falls $U = 0$ ist, so sagt man, das Spiel habe den reinen Wert V (wobei $V = U = 0$).

Man kann zeigen, daß ein Sattelpunkt $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$ genau dann existiert, wenn $U = 0$ ist. In diesem Fall ist $V = a_{i_0 j_0}$.

Am ersten Beispiel sieht man, daß nicht jedes Nullsummenspiel einen Sattelpunkt hat. Umgekehrt zeigt das folgende Beispiel, daß es in einem Spiel auch mehrere Sattelpunkte geben kann:

	β_1	β_2	β_3	β_4	m_i
α_1	3	1	4	1	1
α_2	1	1	3	1	1
α_3	-2	0	1	0	-2
M_j	3	1	4	1	

Hier ist $U = O = V = 1$, und es gibt die vier Sattelpunkte (α_1, β_2), (α_1, β_4), (α_2, β_2) und (α_2, β_4). Diese Nichteindeutigkeit beeinträchtigt aber keineswegs die Bedeutung des Begriffes Sattelpunkt, da in solchen Fällen stets gilt:

Hat ein Nullsummenspiel die Sattelpunkte (α_i, β_j) und (α_k, β_l), so sind auch (α_i, β_l) und (α_k, β_j) Sattelpunkte, und es gilt:

$$a_{ij} = a_{kl} = a_{il} = a_{kj}$$

Mehrere existierende Sattelpunkte sind also stets <u>äquivalent</u> in dem Sinn, daß sie alle eine gleich große Auszahlung erwarten lassen. Das ist sehr wichtig, da andernfalls die beiden Spieler jeweils unterschiedliche Sattelpunkte bevorzugen würden.

Außerdem folgt aus der obigen Bedingung, daß mehrere existierende Sattelpunkte stets <u>austauschbar</u> sind: jedes Strategienpaar, bestehend aus einer Minimaxstrategie von I und einer von II, ist wieder ein Sattelpunkt. Dadurch ist es möglich, nicht nur von Gleichgewichtspunkten, sondern von Gleichgewichtsstrategien der einzelnen Spieler zu sprechen.

Hat ein Nullsummenspiel einen Sattelpunkt (α_i, β_j), so garantiert die Minimaxstrategie α_i Spieler I , daß sein Gewinn mindestens V beträgt. Umgekehrt garantiert β_j Spieler II, daß sein Verlust nicht größer als V ist. Jeder der beiden Spieler kann seine Situation nur verschlechtern, wenn er von seiner Minimaxstrategie abweicht, der Gegner jedoch diese beibehält. Um auch für Spiele ohne Sattelpunkte derartige Sicherheitsschranken angeben zu können, hat man den Begriff der <u>gemischten Strategie</u> eingeführt:

Unter einer gemischten Strategie eines Spielers versteht man eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über seinen reinen Strategien. So ist, zum Beispiel, jede gemischte Strategie X von Spieler I von der Gestalt

$$X = (x_1.\alpha_1, x_2.\alpha_2, \ldots\ldots, x_m.\alpha_m), \text{ wobei } x_i \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

und jede gemischte Strategie Y von Spieler II von der Gestalt

$$Y = (y_1.\beta_1, y_2.\beta_2, \ldots\ldots, y_n.\beta_n), \text{ wobei } y_j \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Insbesondere kann jede reine Strategie als spezielle gemischte Strategie aufgefaßt werden. So ist etwa $\alpha_i = (0.\alpha_1, 0.\alpha_2, \ldots, 1.\alpha_i, \ldots, 0.\alpha_m)$.

Verwendet I die gemischte Strategie X und II die gemischte Strategie Y, so ist der zu erwartende Gewinn für Spieler I gegeben durch

$$A(X,Y) = \sum_{i,j} x_i a_{ij} y_j$$

Es ist naheliegend, ein Paar (X_0, Y_0) von gemischten Strategien dann als Gleichgewichtspunkt der gemischten Erweiterung des Spiels zu bezeichnen, wenn für alle X und Y gilt:

$$A(X,Y_0) \leq A(X_0,Y_0) \leq A(X_0,Y)$$

Die linke Seite der Ungleichung besagt, daß X_0 unter allen gemischten Strategien X von Spieler I die beste Antwort auf Y_0 ist. Aus der rechten Seite der Ungleichung folgt umgekehrt, daß Y_0 den Verlust von Spieler II minimiert, sofern I die Strategie X_0 verwendet. Auch hier gilt, daß existierende Gleichgewichtspunkte äquivalent und austauschbar sind.

Von zentraler Bedeutung für die gesamte Spieltheorie ist das sogenannte <u>Minimaxtheorem</u>, das auch als <u>Hauptsatz für Zweipersonennullsummenspiele</u> bezeichnet wird. Dieser Satz wurde erstmals von John von Neumann in [3] bewiesen. Er besagt, daß jedes Zweipersonennullsummenspiel mit nur endlich vielen Strategien in seiner gemischten Erweiterung einen Wert V besitzt, das heißt, daß stets

$$\max_X \min_Y A(X,Y) = \min_Y \max_X A(X,Y) = V,$$ und daß jeder

Spieler mindestens eine (gemischte) Gleichgewichtsstrategie X_0 bzw. Y_0 besitzt, mit der er den Wert V garantieren kann.

3. GEOMETRISCHE INTERPRETATION VON NULLSUMMENSPIELEN

a) 2x2 - SPIELE

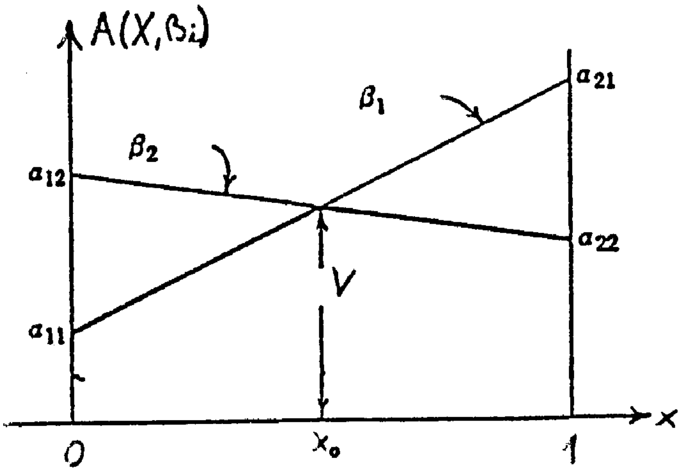
Der einfachste denkbare Fall ist ein Spiel, bei dem jeder der beiden Spieler nur über zwei reine Strategien α_1, α_2 bzw. β_1, β_2 verfügt:

			Spieler II:	
			y	$1-y$
			β_1	β_2
	x	α_1	a_{11}	a_{12}
Spieler I:	$1-x$	α_2	a_{21}	a_{22}

Wählt Spieler I die gemischte Strategie $X = (x\alpha_1, (1-x)\alpha_2)$ und Spieler II die reine Strategie β_1 bzw. β_2, so ist die dabei zu erwartende Auszahlung für Spieler I gegeben durch:

$$A(X,\beta_1) = x.a_{11} + (1-x).a_{21}$$
$$A(X,\beta_2) = x.a_{12} + (1-x).a_{22}$$

Jeder möglichen gemischten Strategie X von I entspricht ein x im Intervall [0,1], und die beiden obigen Auszahlungsfunktionen sind lineare Funktionen in x. Als graphische Darstellung erhält man daher zwei Strecken (deren gegenseitige Lage vom Größenverhältnis der a_{ij} abhängt):



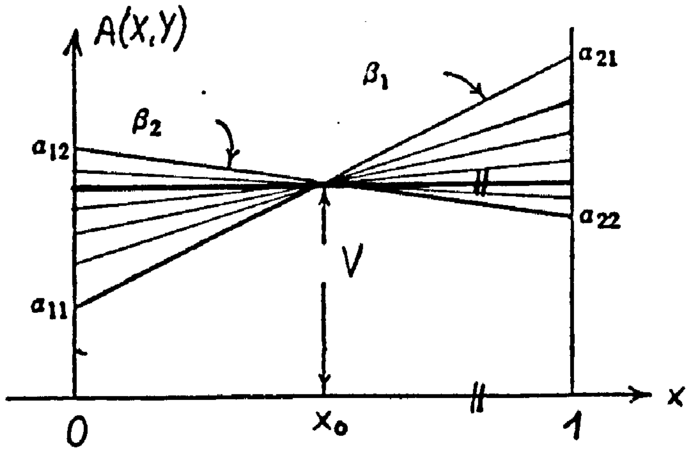
Für jedes x aus [0,1] geben die beiden Funktionsgraphen an, welche Auszahlung Spieler I bei Wahl dieser Strategie X zu erwarten hat, wenn II die reine Strategie β_1 bzw. β_2 verwendet. Der fettgedruckte Streckenzug entspricht jener Auszahlung, die sich I beim jeweiligen x auf alle Fälle sichern kann. Im hier dargestellten Beispiel haben die beiden Geraden einen Schnittpunkt (x_0, V) in [0,1]. Logischerweise entspricht x_0 der einzigen Minimaxstrategie von Spieler I, und V entspricht dem Wert des Spiels. Rechnerisch erhält man x_0 als Lösung der Gleichung

$$A(X, \beta_1) = A(X, \beta_2) \text{ , dh. } x_0 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}$$

und V ergibt sich durch Einsetzen von x_0 in eine der beiden Funktionsgleichungen, zum Beispiel:

$$V = x_0 . a_{11} + (1-x_0) . a_{21}$$

Offen ist nun noch die Frage nach der Minimaxstrategie von Spieler II. Hier kann man sich folgendes überlegen: Jeder gemischten Strategie $(y\beta_1, (1-y)\beta_2)$ mit y aus $[0,1]$ entspricht eine Strecke, die zwischen den beiden Graphen von $A(X,\beta_1)$ und $A(X,\beta_2)$ liegt.

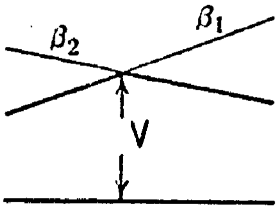


Durchläuft y alle Werte zwischen 0 und 1, so durchlaufen die entsprechenden Graphen A(X,Y) den gesamten Bereich zwischen der β_1-Geraden und der β_2-Geraden. Einer Minimaxstrategie von Spieler II entspricht nun jene Gerade, die parallel zur x-Achse im Abstand V verläuft: Durch Wahl dieser Strategie kann Spieler II verhindern, daß I durch geschickte Strategienwahl eine höhere Auszahlung als V erreicht.

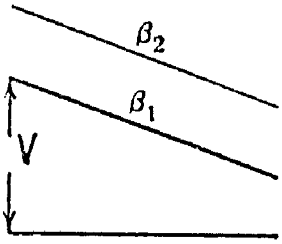
Rechnerisch erhält man das zugehörige y_0 durch Lösen der Gleichung

$$A(\alpha_1, Y) = V \text{ , dh. } y_0 . a_{11} + (1-y_0) . a_{12} = V \text{ .}$$

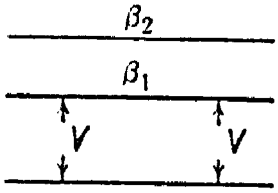
Analoge Überlegungen sind auf alle 2x2-Spiele anwendbar. Je nach dem Größenverhältnis der Matrixelemente a_{ij} erhält man die folgenden Fälle:



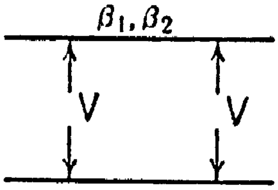
(a)



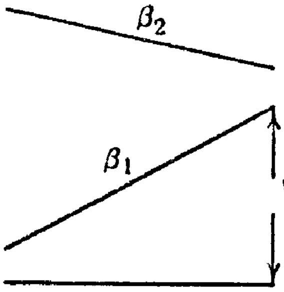
(b)



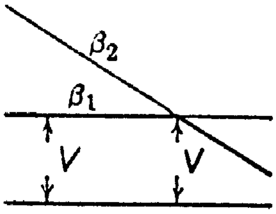
(c)



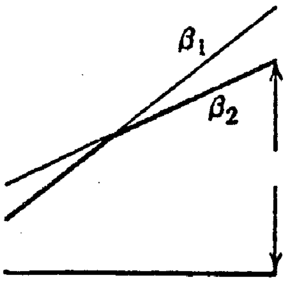
(d)



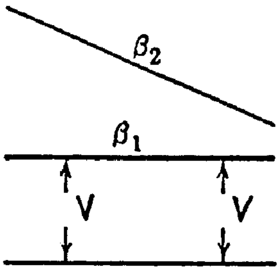
(e)



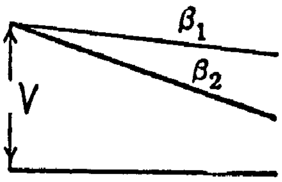
(f)



(g)



(h)



(i)

Der Fall a) entspricht dem oben dargestellten Beispiel, bei dem die beiden Spieler jeweils eine eindeutige gemischte Minimaxstrategie besitzen. Im Fall b) sind nur die reinen Strategien α_2 bzw. β_1 Minimaxstrategien. In c) sind alle möglichen Strategien von Spieler I optimal, während für Spieler II nur β_1 in Frage kommt. In d) sind für beide Spieler alle ihrer möglichen Strategien optimal. In e) kommen nur die reinen Strategien α_1 bzw. β_1 in Frage. In f) gibt es für Spieler I ein ganzes Intervall an Minimaxstrategien, während für Spieler II nur die reine Strategie β_1 optimal ist. In g) sind nur die reinen Strategien α_1 und β_2 Minimaxstrategien, in i) nur α_2 und β_2. In h) schließlich sind analog zu c) alle Strategien von I optimal, für II dagegen nur die reine Strategie β_1.

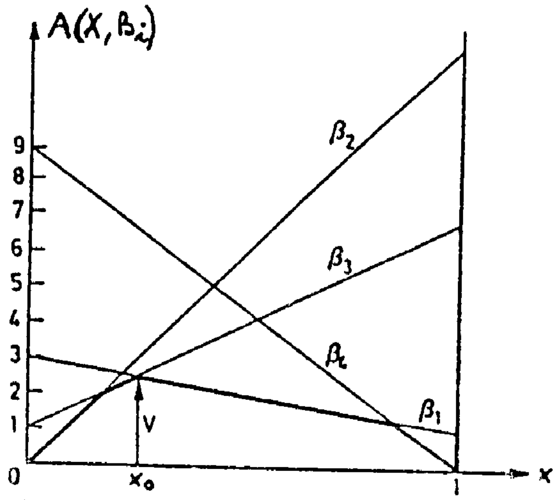
b) 2xN - SPIELE

Analog dazu kann man den Fall betrachten, daß Spieler I über nur zwei reine Strategien α_1, α_2 und Spieler II über n reine Strategien β_1, β_2, ...,β_n verfügt. Dazu ein konkretes Beispiel:

			Spieler II:			
			y_1	y_2	y_3	y_4
			β_1	β_2	β_3	β_4
	x	α_1	1	12	7	1
Spieler I:	1-x	α_2	3	0	1	9

Wählt Spieler I die gemischte Strategie $X = (x\alpha_1, (1-x)\alpha_2)$ und Spieler II eine seiner reinen Strategien, so erhält man als Auszahlungsfunktion für Spieler I:

$$A(X,\beta_1) = x + 3(1-x)$$
$$A(X,\beta_2) = 12x$$
$$A(X,\beta_3) = 7x + (1-x)$$
$$A(X,\beta_4) = 9(1-x)$$



Diesen linearen Funktionen entsprechen wiederum vier Strecken, aus deren gegenseitiger Lage man die Minimaxstrategie von Spieler I ablesen kann. Der fettgedruckte Streckenzug gibt für jedes x aus [0,1] an, welche Auszahlung sich I bei Verwendung dieser gemischten Srategie auf alle Fälle sichern kann, die einzige Minimaxstrategie x_0 von I erhält man, indem man die Schnittpunktskoordinaten (x_0, V) von $A(X,\beta_1)$ und $A(X,\beta_3)$ berechnet:

$$A(X, \beta_1) = A(X, \beta_3)$$

$$x + 3(1-x) = 7x + (1-x) \quad \text{----}\!> \quad x_0 = 0,25.$$
$$\text{----}\!> \quad V = 2,5.$$

Die einzige Minimaxstrategie von Spieler I ist somit

$$X_0 = (0,25.\alpha_1\,,\ 0,75.\alpha_2),$$

und er kann sich damit einen garantierten Gewinn von $V = 2,5$ sichern.

Zur Ermittlung der Minimaxstrategie von Spieler II kann man sich anhand der obigen graphischen Darstellung folgendes überlegen: Verwendet I seine Minimaxstrategie X_0, so ist es für II ungünstig, β_2, β_4 oder irgendeine gemischte Strategie, in der β_2 oder β_4 vorkommt, zu verwenden. Um zu verhindern, daß I eine höhere Auszahlung als $V = 2,5$ erhält, muß er jene gemischte Strategie

$$Y_0 = (y_0.\beta_1\,,\ 0\ ,\ (1-y_0).\beta_3\ ,\ 0)$$

wählen, die der waagrechten Geraden durch den Punkt (x_0, V) entspricht. Berechnung ergibt:

$$A(\alpha_1, Y_0) = 2,5$$

$$y_0 + 7(1-y_0) = 2,5 \quad \text{----}\!> \quad y_0 = 0,75.$$

4. EINE ITERATIVE METHODE ZUR LÖSUNG VON NULLSUMMENSPIELEN

Im Jahre 1951 entwickelte die Mathematikerin Julia Robinson [6] ein iteratives Verfahren, das es ermöglicht, die Gleichgewichtsstrategien eines endlichen Zwei-Personen-Nullsummenspiels aufgrund plausibler Annahmen schrittweise anzunähern.

Bei dieser "Methode des fiktiven Ausspielens" wird angenommen, daß das Spiel sehr oft wiederholt wird und daß die beiden Spieler dabei stets nur reine Strategien verwenden:

- Jeder Spieler notiert, wie oft sein Gegner in den bereits stattgefundenen Spielen die einzelnen reinen Strategien gewählt hat.
- Diese empirische Verteilung der bisher verwendeten reinen Strategien wird als gemischte Strategie des Gegners aufgefaßt.
- Im nächstfolgenden Zug wird nun jene reine Strategie gewählt, die als Antwort auf diese gegnerische gemischte Strategie den größten Gewinn bzw. den kleinsten Verlust erwarten läßt.
- Man erhält so eine Folge von empirischen Verteilungen, und in [6] wird bewiesen, daß jeder Häufungspunkt dieser Vektorfolge eine Gleichgewichtsstrategie des betreffenden Spielers ist.

Praktische Bedeutung erlangt dieses Verfahren vor allem bei Spielen mit einer großen Anzahl von reinen Strategien.

Auch für den Mathematikunterricht im Wahlpflichtfach ist die Methode des fiktiven Ausspielens interessant. Mit Hilfe des an allen Schulen vorhandenen Tabellenkalkulationsprogramms Supercalc 5 ist es dadurch relativ einfach möglich, Näherungslösungen für Nullsummenspiele mit dem Computer zu ermitteln.

Im folgenden wird die Anwendung des Verfahrens anhand eines konkreten Beispiels erklärt. Gegeben sei das 2x2-Spiel

			Spieler II:	
			y	$1-y$
			β_1	β_2
	x	α_1	1	3
Spieler I:	$1-x$	α_2	4	2

Nach den Methoden des vorigen Abschnitts findet man für die Gleichgewichtsstrategien X_0, Y_0 der beiden Spieler

$$X_0 = (0{,}5.\alpha_1,\ 0{,}5.\alpha_2) \text{ und } Y_0 = (0{,}25.\beta_1,\ 0{,}75.\beta_2).$$

Als Wert des Spiels erhält man $V = 2{,}5$. Man kann nun diese exakten Lösungen mit den Näherungswerten vergleichen, die das iterative Verfahren liefert. Dazu legt man die folgende Tabelle auf dem Computerbildschirm an:

	A	C	D	E	F	H	I	J	K	M	N
1											
2	2x2 Nullsummenspiel										
3											
4						b1	b2				
5											
6					a1	1	3				
7					a.	4	2				
8											
9											
10											
11	k	a1	a2	b1	b2	u1/k	u2/k	z1/k	z2/k	a1/k	b1/k
12											
13	1	1	0	0	1	3,00	2,00	1,00	3,00	1	0
14	2	2	0	1	1						

In Spalte A wird die Anzahl k der bisher stattgefundenen Spiele eingetragen.

In den Spalten C, D, E, F kann man ablesen, wie oft die reinen Strategien α_1, α_2, β_1, β_2 in den bisherigen k Spielen gewählt worden sind. Beim ersten Spiel der fiktiven Spielfolge wählt jeder Spieler willkürlich eine seiner reinen Strategien aus, da noch keine Erfahrung vorliegt. In diesem Beispiel wurden etwa die Strategien α_1 und β_2 gewählt und daher in Zeile 13 die Werte 1, 0, 0, 1 eingetragen.

Spalte H bzw. I gibt an, welchen Gewinn Spieler I zu erwarten hat, wenn er seine reine Strategie α_1 bzw. α_2 wählt und sein Gegner die der Häufigkeitsverteilung in den Spalten E und F entsprechende gemischte Strategie anwendet. So berechnet man etwa für Zeile 13

$$u1/k = (b1.1 + b2.3)/k = (0.1 + 1.3)/1 = 3$$
und $$u2/k = (b1.4 + b2.2)/k = (0.4 + 1.2)/1 = 2.$$

Da die Strategie α_1 den größeren Gewinn verspricht, wird Spieler I im nächsten Spiel α_1 wählen. In Zeile 14 wird daher die Anzahl a1 auf 2 erhöht und die Anzahl a2 bleibt gleich. (Sollten α_1 und α_2 gleich großen Gewinn versprechen, so darf man natürlich nur die Anzahl einer der beiden Strategien um eins erhöhen).

Genauso gibt Spalte J bzw. K an, welchen Verlust Spieler II zu erwarten hat, wenn er seine reine Strategie β_1 bzw. β_2 wählt und sein Gegner die der Häufigkeitsverteilung in den Spalten C und D entsprechende gemischte Strategie verwendet. Für das erste Spiel in Zeile 13 erhält man daher

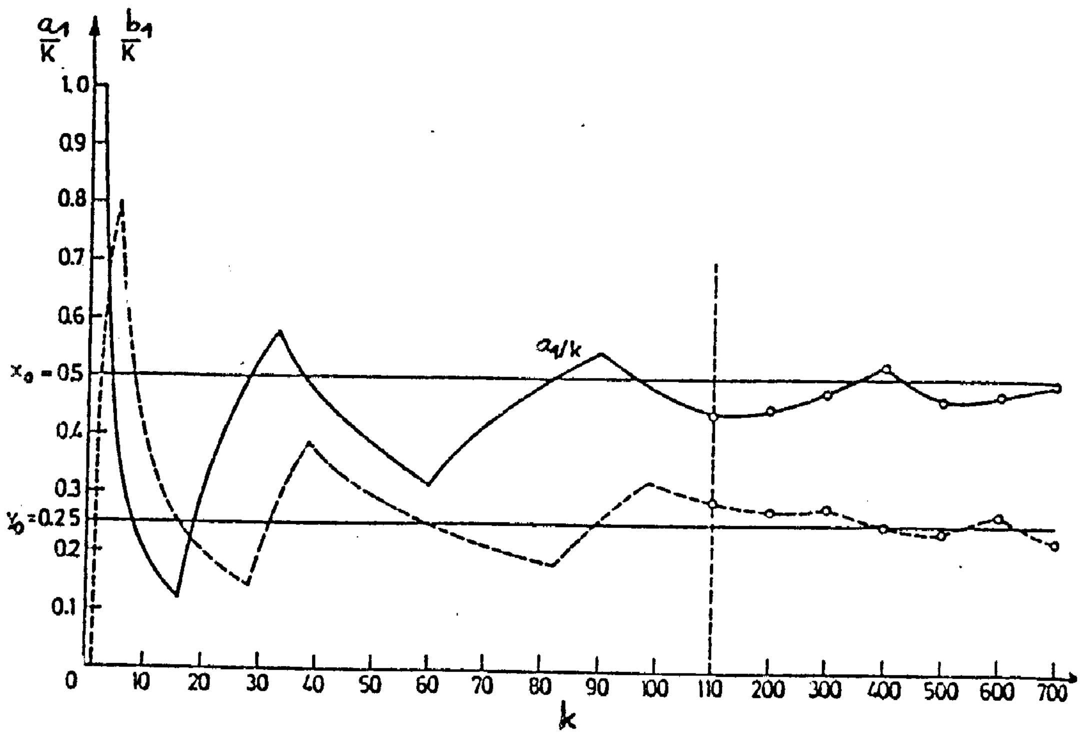
$$z1/k = (a1.1 + a2.4)/k = (1.1 + 0.4)/1 = 1$$
und $$z2/k = (a1.3 + a2.2)/k = (1.3 + 0.2)/1 = 3.$$

Um den Verlust klein zu halten, wird Spieler II im nächsten Spiel die Strategie β_1 wählen. In Zeile 14 ist daher die Anzahl b1 um 1 zu erhöhen.

In der Notation von Supercalc können die obigen Überlegungen durch folgende Formeln ausgedrückt werden:

```
H13:    +(E13*$H$6+F13*$I$6)/A13       A14:    +A13+1
I13:    +(E13*$H$7+F13*$I$7)/A13       C14:    IF(H13>=I13;C13+1;C13)
J13:    +(C13*$H$6+D13*$H$7)/A13       D14:    IF(H13<I13;D13+1;D13)
K13:    +(C13*$I$6+D13*$I$7)/A13       E14:    IF(J13<=K13;E13+1;E13)
                                       F14:    IF(J13>K13;F13+1;F13)
M13:    +C13/A13
N13:    +E13/A13
```

Durch Kopieren dieser Formeln kann man nun sehr rasch eine große Zahl von Spielen simulieren. Für das betrachtete Beispiel ist der Ablauf der ersten 52 Spiele in der untenstehenden Tabelle dargestellt.



k	a1	a2	b1	b2	u1/k	u2/k	z1/k	z2/k	a1/k	b1/k
1	1	0	0	1	3,00	2,00	1,00	3,00	1	0
2	2	0	1	1	2,00	3,00	1,00	3,00	1	.5
3	2	1	2	1	1,67	3,33	2,00	2,67	,667	,667
4	2	2	3	1	1,50	3,50	2,50	2,50	,5	,75
5	2	3	4	1	1,40	3,60	2,80	2,40	,4	,8
6	2	4	4	2	1,67	3,33	3,00	2,33	,333	,667
7	2	5	4	3	1,86	3,14	3,14	2,29	,286	,571
8	2	6	4	4	2,00	3,00	3,25	2,25	,25	,5
9	2	7	4	5	2,11	2,89	3,33	2,22	,222	,444
10	2	8	4	6	2,20	2,80	3,40	2,20	,2	,4
11	2	9	4	7	2,27	2,73	3,45	2,18	,182	,364
12	2	10	4	8	2,33	2,67	3,50	2,17	,167	,333
13	2	11	4	9	2,38	2,62	3,54	2,15	,154	,308
14	2	12	4	10	2,43	2,57	3,57	2,14	,143	,286
15	2	13	4	11	2,47	2,53	3,60	2,13	,133	,267
16	2	14	4	12	2,50	2,50	3,63	2,13	,125	,25
17	3	14	4	13	2,53	2,47	3,47	2,18	,176	,235
18	4	14	4	14	2,56	2,44	3,33	2,22	,222	,222
19	5	14	4	15	2,58	2,42	3,21	2,26	,263	,211
20	6	14	4	16	2,60	2,40	3,10	2,30	,3	,2
21	7	14	4	17	2,62	2,38	3,00	2,33	,333	,190
22	8	14	4	18	2,64	2,36	2,91	2,36	,364	,182
23	9	14	4	19	2,65	2,35	2,83	2,39	,391	,174
24	10	14	4	20	2,67	2,33	2,75	2,42	,417	,167
25	11	14	4	21	2,68	2,32	2,68	2,44	,44	,16
26	12	14	4	22	2,69	2,31	2,62	2,46	,462	,154
27	13	14	4	23	2,70	2,30	2,56	2,48	,481	,148
28	14	14	4	24	2,71	2,29	2,50	2,50	.5	,143
29	15	14	5	24	2,66	2,34	2,45	2,52	,517	,172
30	16	14	6	24	2,60	2,40	2,40	2,53	,533	,2
31	17	14	7	24	2,55	2,45	2,35	2,55	,548	,226
32	18	14	8	24	2,50	2,50	2,31	2,56	,563	,25
33	19	14	9	24	2,45	2,55	2,27	2,58	,576	,273
34	19	15	10	24	2,41	2,59	2,32	2,56	,559	,294
35	19	16	11	24	2,37	2,63	2,37	2,54	,543	,314
36	19	17	12	24	2,33	2,67	2,42	2,53	,528	,333
37	19	18	13	24	2,30	2,70	2,46	2,51	,514	,351
38	19	19	14	24	2,26	2,74	2,50	2,50	,5	,368
39	19	20	15	24	2,23	2,77	2,54	2,49	,487	,385
40	19	21	15	25	2,25	2,75	2,58	2,48	,475	,375
41	19	22	15	26	2,27	2,73	2,61	2,46	,463	,366
42	19	23	15	27	2,29	2,71	2,64	2,45	,452	,357
43	19	24	15	28	2,30	2,70	2,67	2,44	,442	,349
44	19	25	15	29	2,32	2,68	2,70	2,43	,432	,341
45	19	26	15	30	2,33	2,67	2,73	2,42	,422	,333
46	19	27	15	31	2,35	2,65	2,76	2,41	,413	,326
47	19	28	15	32	2,36	2,64	2,79	2,40	,404	,319
48	19	29	15	33	2,38	2,63	2,81	2,40	,396	,313
49	19	30	15	34	2,39	2,61	2,84	2,39	,388	,306
50	19	31	15	35	2,40	2,60	2,86	2,38	,38	,3
51	19	32	15	36	2,41	2,59	2,88	2,37	,373	,294
52	19	33	15	37	2,42	2,58	2,90	2,37	,365	,288

In Spalte M bzw. N schließlich wird noch die relative Häufigkeit der Strategie α_1 bzw. β_1 in den bisherigen k Spielen angegeben. Diese beiden Werte sollten im vorliegenden Beispiel für großes k gegen die exakten Lösungen 0,5 bzw. 0,25 streben. Die folgende Graphik zeigt die Entwicklung dieser relativen Häufigkeiten in den ersten 700 Spielen. Nach starken anfänglichen Schwankungen nähern sich die Werte schließlich deutlich den Größen 0,5 bzw. 0,25.

5. AUFGABENSTELLUNGEN FÜR DEN UNTERRICHT

Im Hinblick auf den Unterricht im Wahlpflichtfach seien abschließend noch einige konkrete Vorschläge für mögliche Aufgabenstellungen angeführt.

5.1) Gib für die folgenden Zweipersonennullsummenspiele die Auszahlungsmatrix an und bestimme U und O:

a) "Matching Pennies": Zwei Spieler legen gleichzeitig eine 10-Schilling-Münze auf den Tisch. Zeigen beide Münzen die gleiche Seite nach oben, so gehen sie an I, zeigen sie verschiedene Seiten, so erhält sie II.
b) "Schere-Stein-Papier": Zwei Spieler wählen gleichzeitig Schere, Stein oder Papier. Gleiche Wahl bedeutet unentschieden, Schere gewinnt gegen Papier, Papier gegen Stein und Stein gegen Schere.
c) "Schere-Stein-Papier-Brunnen": wie b), zusätzlich gewinnt Brunnen gegen Schere und gegen Stein und verliert gegen Papier.

5.2) Gib je ein konkretes Beispiel für die Auszahlungsmatrix eines 3x3- sowie eines 4x5-Nullsummenspiels an, das
a) genau einen
b) keinen
c) mehr als einen
Sattelpunkt in den reinen Strategien hat.

5.3) Untersuche die folgenden Nullsummenspiele. Ermittle U, O und V sowie die Minimaxstrategien der beiden Spieler:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

5.4) Die Abbildungen a) bis i) in Abschnitt 3 zeigen mögliche gegenseitige Lagen der beiden Graphen der Auszahlungsfunktionen $A(X,\beta_1)$ und $A(X,\beta_2)$ eines 2x2-Nullsummenspiels.
Gib zu jedem der dargestellten Fälle ein konkretes numerisches Beispiel einer passenden Auszahlungsmatrix an.

5.5) Finde eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein 2x2-Nullsummenspiel keinen Sattelpunkt in den reinen Strategien hat.

5.6) Untersuche das 2x3-Nullsummenspiel $\begin{pmatrix} 4 & 3{,}4 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Zeige, daß
a) es keinen Sattelpunkt in den reinen Strategien gibt
b) $X_0 = (5/8.\alpha_1, 3/8.\alpha_2)$ die einzige Minimaxstrategie von Spieler I ist
c) $V = 23/8$
d) Spieler II unendlich viele Minimaxstrategien hat, wobei diese von der Form
$Y = [k.\beta_1, (25/32 - k.5/4).\beta_2, (7/32 + k.1/4).\beta_3]$
mit $0 \leq k \leq 5/8$ sind.

5.7) a) Untersuche die Spiele aus Aufgabe 5.3a und 5.3b mit Hilfe der in Abschnitt 4 vorgestellten iterativen Methode.
b) Erstelle anhand der Erläuterungen in Abschnitt 4 Spreadsheets zur näherungsweisen Lösung von 2x3-, von 2x4- sowie von 3x3-Nullsummenspielen und untersuche damit selbstgewählte Beispiele.

LITERATUR

[1] BÜHLMANN, H., LOEFFEL, H., NIEVERGELT, E.: Entscheidungs- und Spieltheorie. Springer Verlag, 1975.

[2] LUCE, R.D., RAIFFA, H.: Games and Decisions. John Wiley, 1966.

[3] NEUMANN J. von.: Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. Mathematische Annalen, 100, 295-320, 1928.

[4] NEUMANN J. von, MORGENSTERN, O.: Theory of Games and Economic Behaviour. Princeton University Press, 1944.

[5] NEUMANN, J. von, MORGENSTERN, O.: Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten, Physica-Verlag, Würzburg, 1961.

[6] ROBINSON, J.: An Iterative Method of Solving a Game. Annals of Mathematics, 54, 296-301, 1951.

[7] THOMAS, L.C.: Games, Theory and Applications. John Wiley, 1984.

[8] Mathematik in der Praxis - Anwendungen in Wirtschaft, Wissenschaft und Politik, Verlag Spektrum der Wissenschaft, Heidelberg, 1989.

ANSCHRIFT DER VERFASSERIN:

Dr. Maria Koth,
Institut für Mathematik,
Universität Wien,
A-1090, Strudlhofgasse 4